

۲ مثلثات

فصل



انشعاب رگ‌ها در بدن انسان به گونه‌ای است که مقاومت هیدرولیکی درون رگ‌ها تابعی مثلثاتی از زاویه بین هر دو رگ متصل به هم است. در شبیه‌سازی کامپیوتری از شبکه رگ‌ها این خاصیت مورد توجه قرار می‌گیرد.

نمره یازدهم

تناوب و تانژانت

درس اول

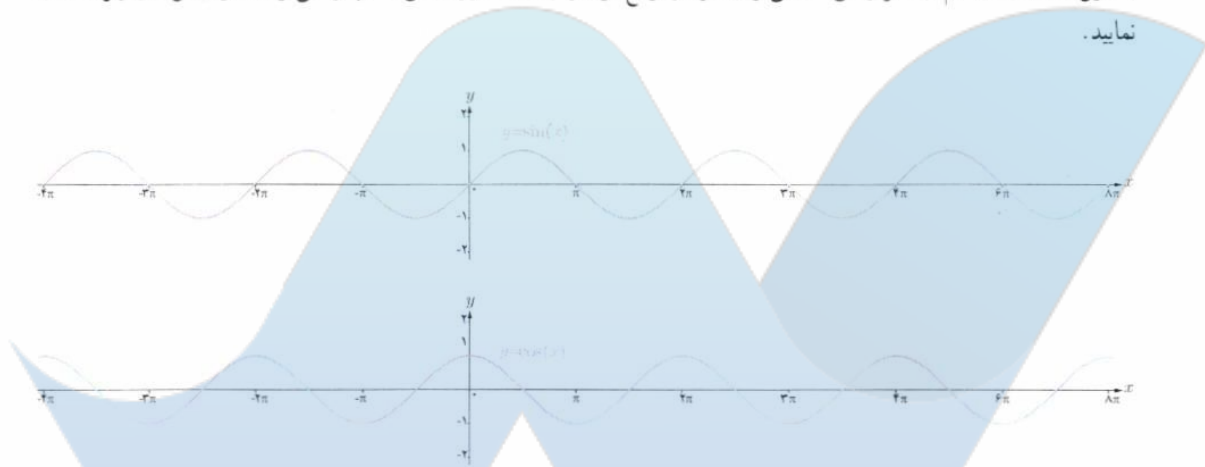
معادلات مثلثاتی

درس دوم

درس اول

تناوب و تناوبت

با توابع مثلثاتی $f(x) = \cos x$ و $f(x) = \sin x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصله 2π روی محور x ها یکسان است ($\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x$ و $\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x$) به عبارتی اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول 2π داشته باشیم، با تکرار این تکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.



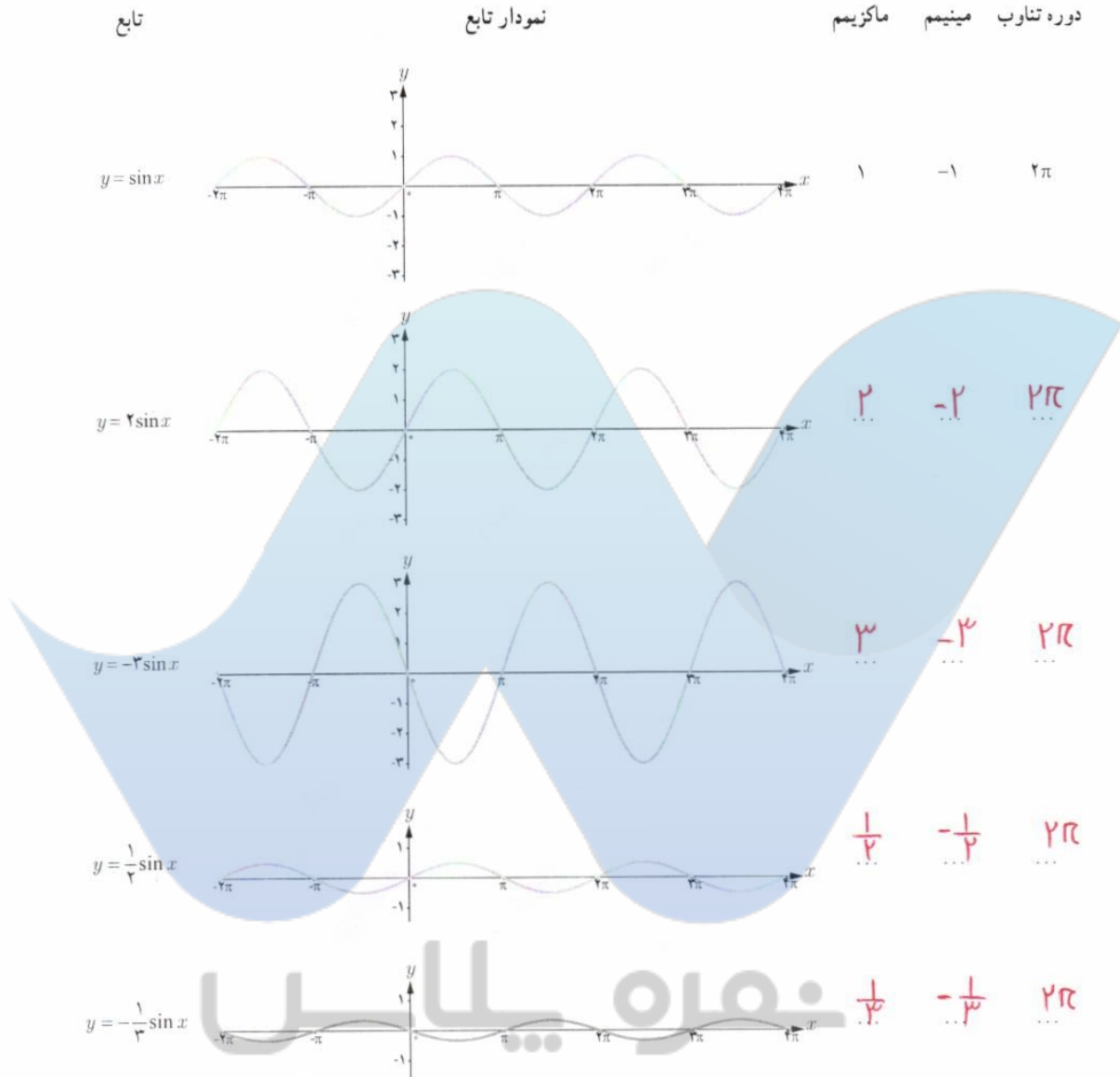
با دقت به نمودار توابع فوق می‌توان مشاهده کرد که نمودار در بازه‌هایی به طول 2π ، 4π ، 6π ، ... تکرار می‌شود. اما کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان 2π است. چنین توابعی را توابع متناوب و 2π را دوره تناوب آنها می‌نامیم.

تعریف: تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود

باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$.

کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f می‌نامیم.

می‌دانیم دوره تناوب تابع $f(x) = \sin x$ ($f(x) = \cos x$) برابر 2π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب 1 و -1 است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x) = a \sin x$ بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.



با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = a \sin x$ را مشخص نمایید.

$y = a \sin x$ $\begin{cases} a > 0 \rightarrow \max = a, \min = -a \\ a < 0 \rightarrow \max = -a, \min = a \end{cases} \Rightarrow \max = |a|, \min = -|a|, T = 2\pi$

با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می دانید مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = a \sin x + c$ چگونه است.

با انجام مراحل مشابه مراحل بالا می توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y = a \cos x$ و $y = a \cos x + c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می آید.

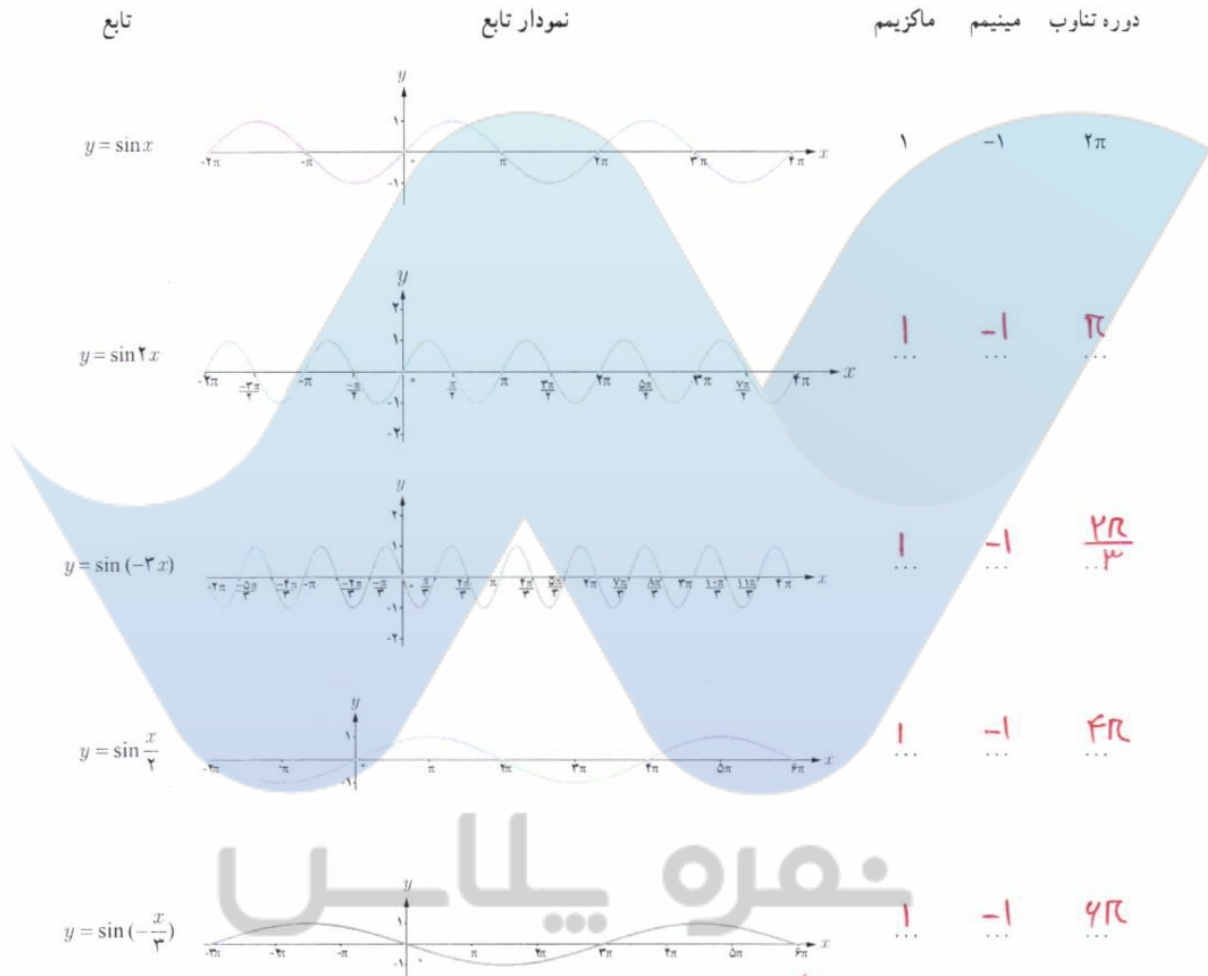
$y = a \cos x \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow \max = a(1) = a, \min = a(-1) = -a \\ a < 0 \Rightarrow \max = a(-1) = -a, \min = a(1) = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max = |a| \\ \min = -|a| \\ T = 2\pi \end{cases}$

$y = a \sin x + c \rightarrow \max = |a| + c, \min = -|a| + c$

دوره تناوب $T = 2\pi$

مفاهیم

با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شده زیر، دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب b در تابع $y = \sin bx$ را بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.



نفره یاب

$y = \sin bx \Rightarrow \max = 1, \min = -1, \text{ دوره تناوب } T = \frac{2\pi}{|b|}$
 با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx$ را مشخص نمایید.

با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می دانیم، مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx + c$ چگونه است.

با انجام مراحل مشابه بالا می توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y = \cos bx + c$ و $y = \cos bx$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می آید.

$y = \sin bx + c \Rightarrow \text{مقدار } c \text{ همان نظر قبلا گفته شد روی } y \text{ تأثیر می گذارد} \Rightarrow \max = 1 + c, \min = -1 + c, \text{ دوره تناوب } T = \frac{2\pi}{|b|}$

$y = \cos bx \Rightarrow \max = 1, \min = -1, \text{ دوره تناوب } T = \frac{2\pi}{|b|}$

$y = \cos bx + c \Rightarrow \max = 1 + c, \min = -1 + c, \text{ دوره تناوب } T = \frac{2\pi}{|b|}$

همان طور که در فعالیت های قبل دیدیم در توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ ضریب a در دوره تناوب تابع بی تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضریب b در دوره تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می شود، در دوره تناوب بی تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$

و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

بنابراین با داشتن ضابطه تابعی به صورت فوق می توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع را به دست آورد و برعکس با داشتن مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب یک تابع مثلثاتی، می توان ضابطه تابع مورد نظر را به دست آورد.
مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y = 3 \sin(2x) - 2$

ب) $y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$

ب) $y = \pi \sin(-x) + 1$

ت) $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

حل:

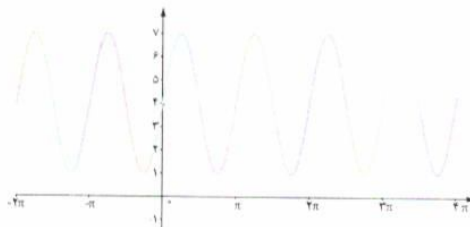
الف) $\max = |3| - 2 = 1$ $\min = -|3| - 2 = -5$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

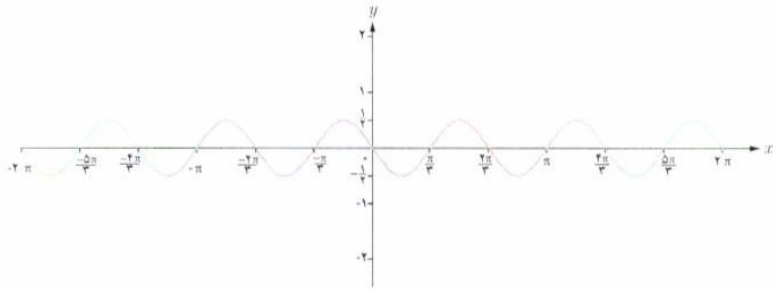
ب) $\max = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$ $\min = -\left|-\frac{1}{4}\right| = -\frac{1}{4}$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

ب) $\max = |\pi| + 1 = \pi + 1$ $\min = -|\pi| + 1 = 1 - \pi$ $T = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

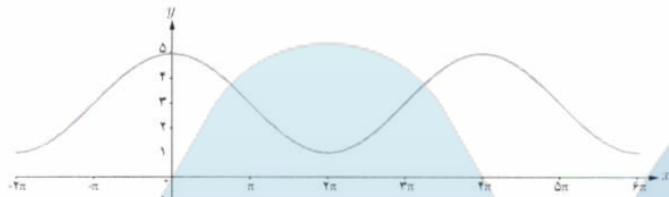
ت) $\max = |8| = 8$ $\min = -|8| = -8$ $T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$

مثال: هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \sin bx + c$ یا $f(x) = a \cos bx + c$ است. با دقت در شکلی نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص نمایید.

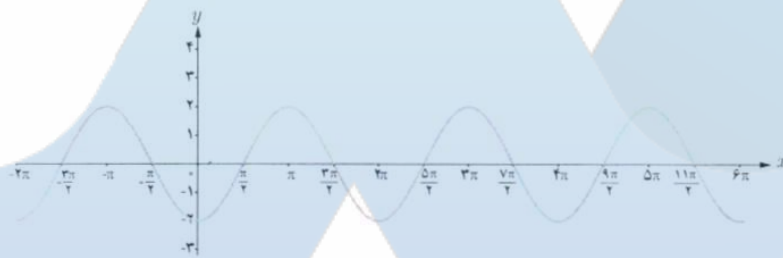




(ب)



(ب)



(ت)

حل: الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و

طول دوره تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$.

از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a| + c$ و $-|a| + c$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = 4$ و در نتیجه $|a| = 3$.

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت باشند لذا ضابطه تابع مورد نظر به صورت مقابل است:

$$y = 3 \sin(2x) + 4$$

ب) با توجه به نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب

از روی نمودار، $c = 0$ و $|a| = \frac{1}{4}$ و $|b| = 3$ به دست می‌آید که در آن علامت a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم $y = -\frac{1}{4} \sin 3x$

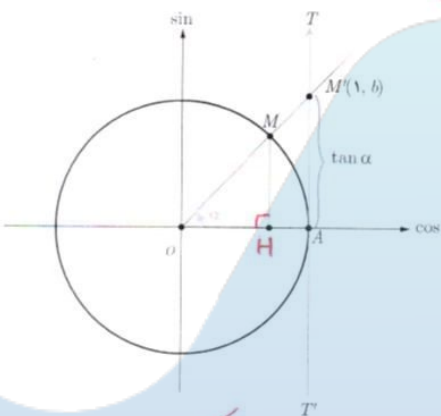
ب) با توجه به شکل نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و

طول دوره تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{4}$ و $|a| = 2$. لذا $a = 2$ و $b = \frac{1}{4}$ و بنابراین داریم $y = 2 \cos(\frac{x}{4}) + 3$.

ت) ضابطه این نمودار نیز می تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و $c = 0$ و $|a| = 2$ و $|b| = 1$ و a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم $y = -2 \cos x$

تانزانت

$\triangle OMH \sim \triangle OMA' \Rightarrow \frac{MH}{MA'} = \frac{OH}{OA'} \xrightarrow{\text{وتر متساوی}} \frac{MH}{OH} = \frac{MA'}{OA'} = 1 \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = MA' = b$



در دایره مثلثاتی رویه و خط TAT' در نقطه A بر محور کسینوس ها عمود است. الف) زاویه α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می گیریم و باره خط OM را امتداد می دهیم تا این خط را در نقطه M' قطع کند. نشان دهید: $\tan \alpha = AM' = b$

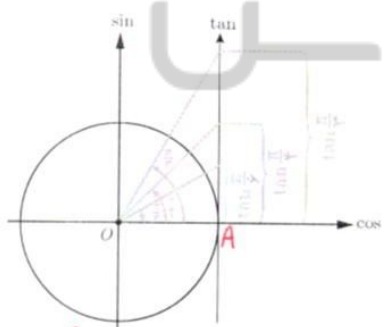
می توان دید که تانزانت هر زاویه دلخواه مانند α ، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می شود. بنابراین خط TAT' را محور تانزانت می نامیم. نقطه A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

ب) چرا تانزانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانزانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟ زیرا امتداد ضلع دوم زاویه در بالا قطع می کند و در پایین قطع می کند.

ب) آیا مقدار $\tan \frac{\pi}{4}$ عددی حقیقی است؟ $\tan \frac{3\pi}{4}$ چطور؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.

با توجه به شکل انتها زاویه $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ روی محور \sin قرار دارند این محور با محور تانزانت موازی است پس همواره قطع نمی شوند. پس نمی توانند قضاظر با عدد روی محور باشند.

تغییرات تانزانت



با تغییر زاویه α مقادیر تانزانت آن نیز تغییر می کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایره مثلثاتی بررسی می کنیم. اگر $\alpha = 0$ ، مقدار $\tan \alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه α ، مقدار $\tan \alpha$ نیز افزایش می یابد.

الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویه α در ربع اول و نزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{2}$ ، مقادیر تانزانت تا چه حد افزایش می یابد؟ بسیار بسیار بزرگ می شود $(+\infty)$

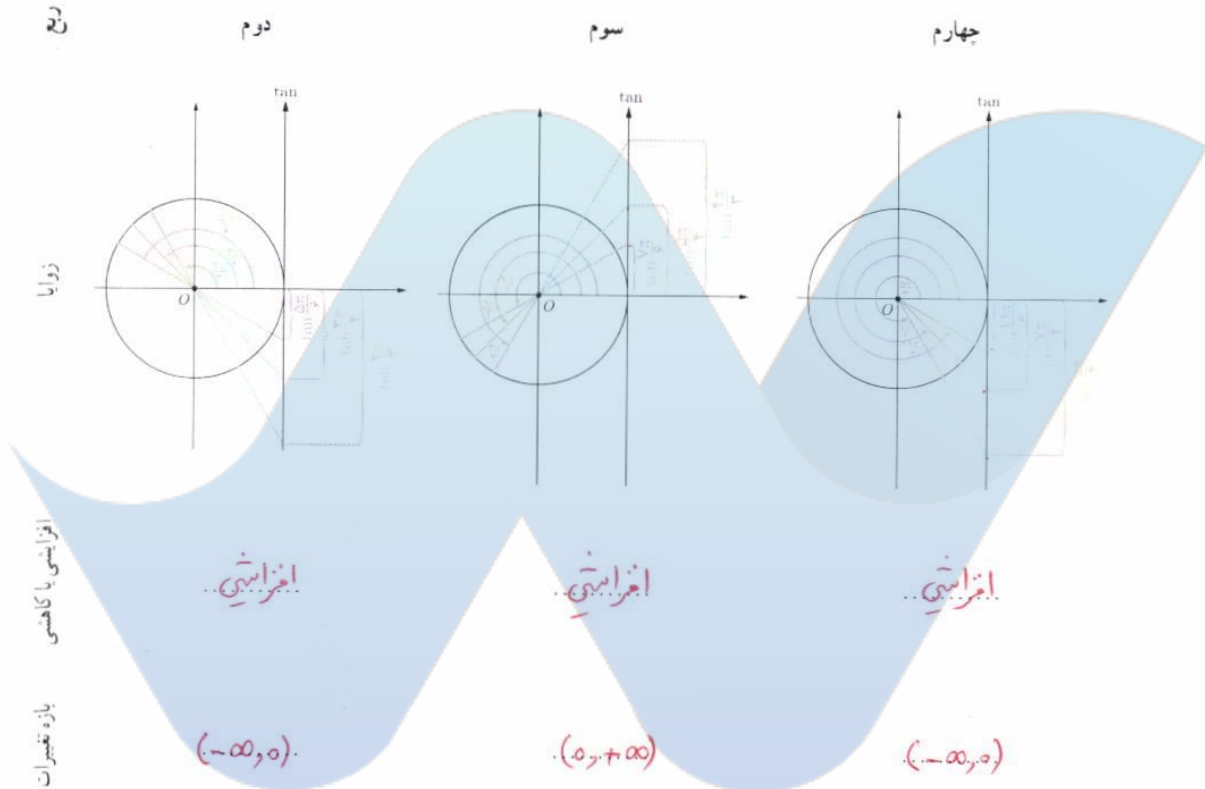
ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت a را داشته باشیم، چگونه می توان زاویه ای مانند α یافت، به طوری که $\tan \alpha = a$.

ابتدا عدد حقیقی و مثبت a که قضاظر با نقطه ای روی محور است، را روی محور TAT' مشخص می کنیم پس از آن نقطه M مبدأ محققات (نقطه O) وصل می کنیم. محل تقاطع آن با دایره مثلثاتی، نقطه انتهایی زاویه α است (م) که ضلع ابتدایی آن OA می باشد. لذا زاویه $\alpha = \widehat{AOM}$ ، زاویه است که تانزانت آن برابر a می شود.

$\tan(\widehat{AOM}) = \tan \alpha = a$

کار در کلاس

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهش؟
 ب) بازه تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.



نهیته کننده:

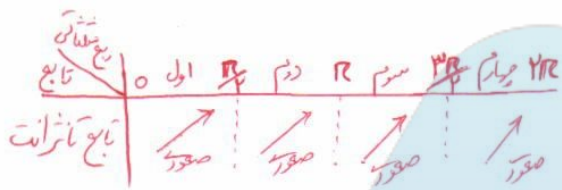
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

پ) جدول زیر را کامل کنید. (علامت \uparrow به معنی افزایش یافتن و علامت \downarrow به معنی کاهش یافتن است.)

ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{6}$ π	$\frac{7\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{4\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$ $\frac{7\pi}{4}$ $\frac{11\pi}{6}$ 2π
\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow	\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow	\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow	\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow
$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 1 $\sqrt{3}$ $+\infty$	نامعین $-\sqrt{3}$ -1 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 1 $\sqrt{3}$ نامعین	$-\sqrt{3}$ -1 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 0

تابع تانژانت

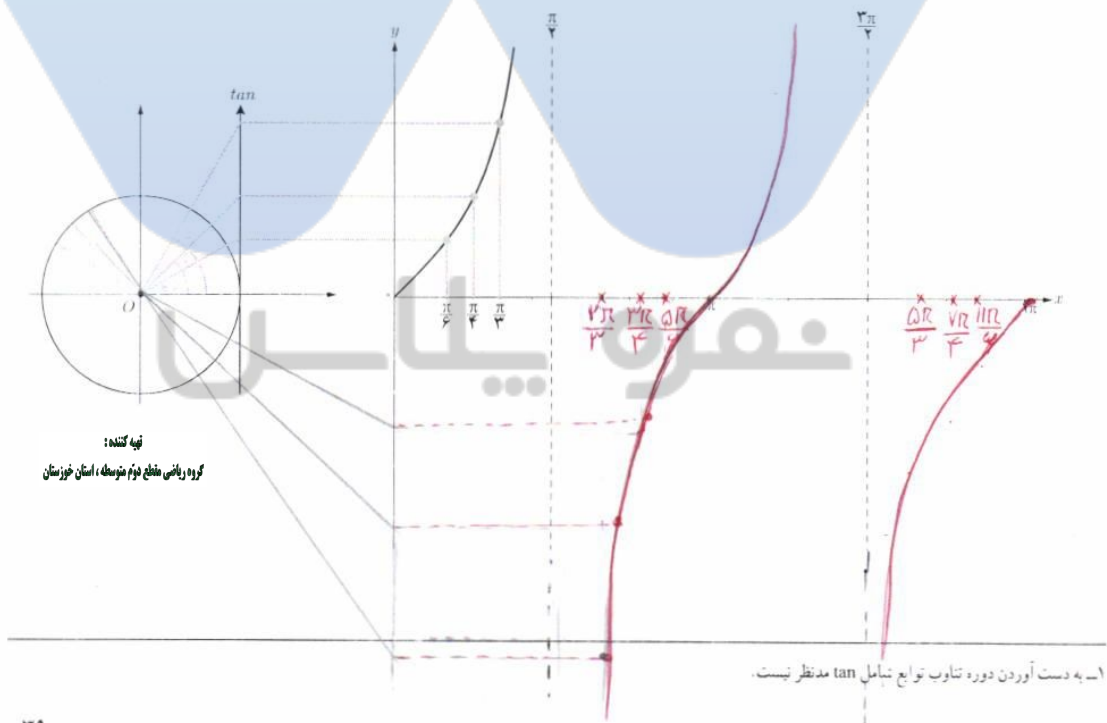
همان طور که می بینیم به ازای هر زاویه دلخواه در دایره مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$), عددی حقیقی به عنوان $\tan \alpha$ داریم و تابعی با ضابطه $y = \tan \alpha$ مشخص می کند. دامنه این تابع مجموعه $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می توان دید تابع $y = \tan \alpha$ تابعی متناوب است و دوره تناوب آن π است، زیرا:

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$


صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan \alpha$ را در بازه $[0, 2\pi]$ بررسی کنید.

رسم تابع $y = \tan \alpha$

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan \alpha$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع های دیگر رسم کنید.



دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

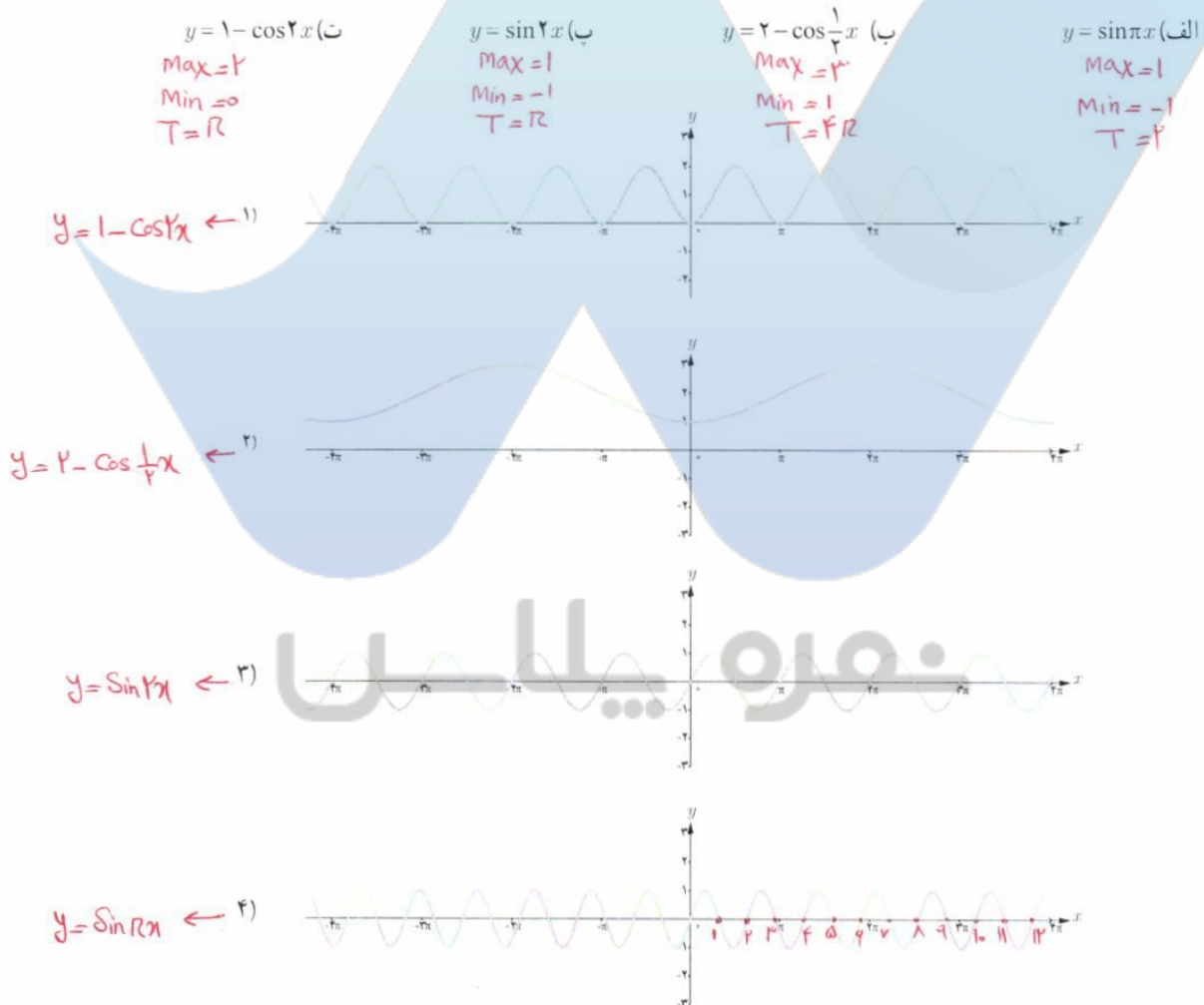
الف) $y = 1 + 2 \sin \sqrt{x} \rightarrow \text{Max} = 2+1=3, \text{Min} = -2+1=-1, T = \frac{2R}{\sqrt{}}$

ب) $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{4}x \rightarrow \text{Max} = \sqrt{3}+1, \text{Min} = \sqrt{3}-1, T = 4$

پ) $y = -\pi \sin(\frac{x}{\pi}) - 2 \rightarrow \text{Max} = R-2, \text{Min} = -R-2, T = 4R$

ت) $y = -\frac{3}{4} \cos 3x \rightarrow \text{Max} = \frac{3}{4}, \text{Min} = -\frac{3}{4}, T = \frac{2R}{3}$

هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$y = \pm \sin(\pm fx)$
 $y = \pm \sin(fx)$
 $y = \pm \cos(\pm fx) \Rightarrow y = \pm \cos(fx)$

درس اول | تناوب و تانژانت

(ب) $y = \pm 3 \sin(\pm \frac{1}{4}x) - 4$
 $y = \pm 3 \sin(\frac{1}{4}x) - 4$
 $y = \pm 3 \cos(\pm \frac{1}{4}x) - 4$
 $y = \pm 3 \cos(\frac{1}{4}x) - 4$

(ب) $y = \pm 3 \sin(\pm \frac{1}{4}x) + 4$
 $y = \pm 3 \sin(\frac{1}{4}x) + 4$
 $y = \pm 3 \cos(\pm \frac{1}{4}x) + 4$
 $y = \pm 3 \cos(\frac{1}{4}x) + 4$

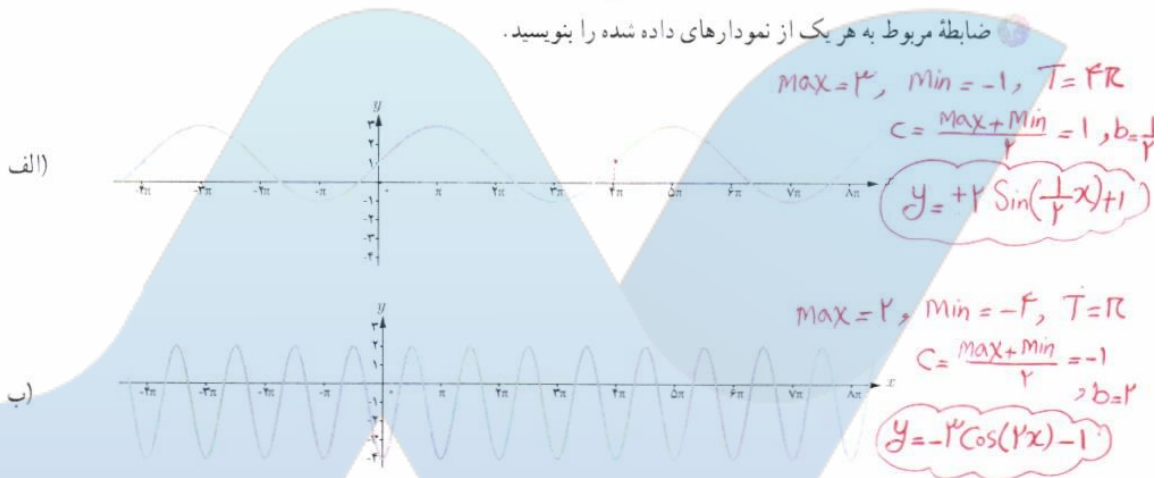
در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

بهتر است برای سوال قید می شد که معادله سینوسی مورد نظر است یا کسینوسی

الف) $T = \pi$, $\max = 3$, $\min = -3 \Rightarrow c = \frac{\max + \min}{2} = 0, a = \pm 3, b = \pm 1 \Rightarrow y = \begin{cases} \pm 3 \sin(\pm x) \\ \pm 3 \sin(2x) \\ \pm 3 \cos(\pm x) \\ \pm 3 \cos(2x) \end{cases}$
 ب) $T = 3$, $\max = 9$, $\min = 3 \Rightarrow c = \frac{\max + \min}{2} = 6, a = \pm 3, b = \pm \frac{1}{3}$
 ب) $T = 4\pi$, $\max = -1$, $\min = -7 \Rightarrow c = \frac{\max + \min}{2} = -4, a = \pm 1, b = \pm \frac{1}{4}$
 ت) $T = \frac{\pi}{4}$, $\max = 1$, $\min = -1 \Rightarrow c = \frac{\max + \min}{2} = 0, a = \pm 1, b = \pm 4$

قید یک جواب کافی است.

ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.



کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تناوب در دامنه اش صعودی است. **نادرست**

ب) می توان بازه ای یافت که تابع تناوب در آن نزولی باشد. **درست**

پ) می توان بازه ای یافت که تابع تناوب در آن غیر صعودی باشد. **درست**

ت) تابع تناوب در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است. **نادرست**

با توجه به محورهای سینوس و تناوب، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید:

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$
 سینوس در ربع اول صعودی است. $\sin \alpha < \tan \alpha$

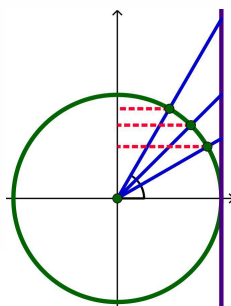
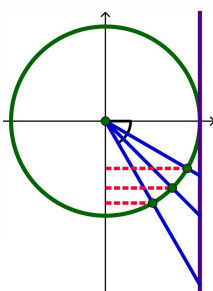
ب) $\frac{3\pi}{4} < \alpha < 2\pi$
 سینوس در ربع چهارم صعودی است. $\sin \alpha > \tan \alpha$

زاویه	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{4}$	2π
Sin	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	0

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$
 سینوس در ربع اول صعودی است. $\sin \alpha < \tan \alpha$

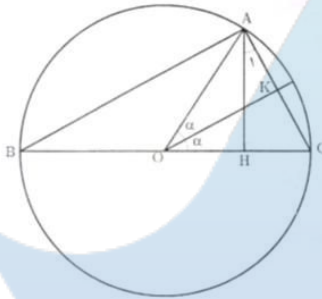
ب) $\frac{3\pi}{4} < \alpha < 2\pi$
 سینوس در ربع چهارم صعودی است. $\sin \alpha > \tan \alpha$

زاویه	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{4}$	2π
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0



نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

در محاسبات فنی گاهی نسبت مثلثاتی برخی زوایا مورد نیاز است که مقدار آن را می‌توان به کمک دیگر زوایا به دست آورد. اگر مقدار $\cos 15^\circ$ را نیاز داشته باشیم چگونه می‌توان آن را با استفاده از مقدار $\cos 30^\circ$ به دست آورد؟ به وضوح 15° نصف 30° است و نیز می‌دانیم $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. آیا با نصف کردن مقدار $\cos 30^\circ$ می‌توان $\cos 15^\circ$ را به دست آورد؟ در ادامه خواهیم دید که جواب منفی است ولی همچنان می‌شود مقدار $\cos 15^\circ$ را به کمک مقدار معلوم $\cos 30^\circ$ یافت اما نه با نصف کردن.^۱



دایره روبه‌رو به شعاع واحد و مرکز O را در نظر بگیرید. مطابق شکل، زاویه مرکزی O برابر 2α داده شده که روبه‌رو به وتر AC است. از این رو در مثلث OAK داریم:

$$AK = \sin \alpha \Rightarrow AC = 2AK = 2 \sin \alpha \quad (۱)$$

همچنین $\widehat{AC} = 2\alpha$ و از آنجا که زاویه محاطی B روبه‌رو به \widehat{AC} است، لذا نصف آن است پس: $\hat{B} = \alpha$.

از طرفی $\hat{A} = 90^\circ$ و لذا BC قطر است و لذا: $\hat{A} = 90^\circ$
همچنین از مجموع زوایای \hat{ABC} به دست می‌آید:

$$\hat{ABC}: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \alpha + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \alpha$$

به‌طور مشابه در \hat{AHC} داریم:

$$\hat{AHC}: \hat{H} + \hat{A}_1 + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{A}_1 + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \alpha$$

اکنون ضلع AH را در \hat{OAC} و \hat{AHC} به دست آورده و برابر قرار می‌دهیم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{OAC}: AH = \sin 2\alpha \\ \hat{AHC}: \cos \hat{A}_1 = \cos \alpha = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \cos \alpha \stackrel{(۱)}{\Rightarrow} AH = 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

همچنین در \hat{OAH} داریم: $OH = \cos 2\alpha$ و در \hat{AHC} داریم:

$$\sin \hat{A}_1 = \sin \alpha = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = \sin \alpha \times AC = \sin \alpha (2 \sin \alpha) = 2 \sin^2 \alpha$$

از طرفی با توجه به اینکه $OC = 1$ شعاع دایره است پس داریم:

$$OC = OH + HC = 1 \Rightarrow OH = 1 - HC \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

و نیز با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ به دست می‌آوریم $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$.

^۱- این روش را ابوالوفا بوزجانی ریاضی‌دان مشهور ایرانی ارائه داده است. طرح اثبات فوق در ارزشیابی‌ها مجاز نیست.

به طور کلی داریم:

$$\sin^2 \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

مثال: مقدار $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ را بیابید.

$$\cos 30^\circ = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\sin 30^\circ = 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \cos 15^\circ$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \cos 15^\circ$$

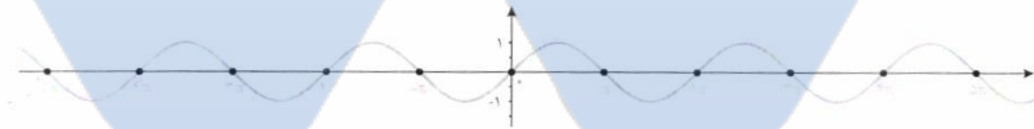
$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad (15^\circ \text{ در ربع اول است.})$$

$$\cos 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \quad (15^\circ \text{ در ربع اول است.})$$

معادلات مثلثاتی

معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول داریم، یک معادله مثلثاتی نام دارد.

مثال: تابع مثلثاتی $y = \sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.



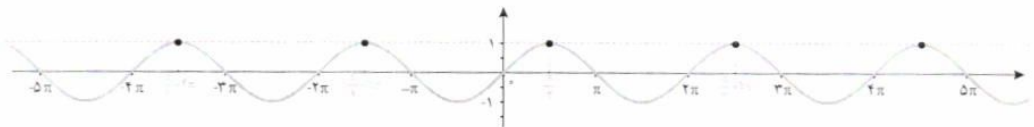
همان‌طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x = 0$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که

به صورت $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ و $-\pi, -2\pi, -3\pi, \dots$ می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y = 0$ (یعنی محور x ها) و تابع $y = \sin x$ است.

این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x = k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.

به‌طور مشابه جواب‌های معادله $\sin x = 1$ مقداری از x هستند که به ازای آنها مقدار $\sin x$ برابر ۱ می‌شود. این مقادیر محل تقاطع $y = 1$ و

$y = \sin x$ است که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله صفحه قبل به صورت

$$x = \dots, \frac{\pi}{4} - 2\pi, \frac{\pi}{4} - 4\pi, \dots, \frac{\pi}{4} + 2\pi, \frac{\pi}{4} + 4\pi, \dots$$

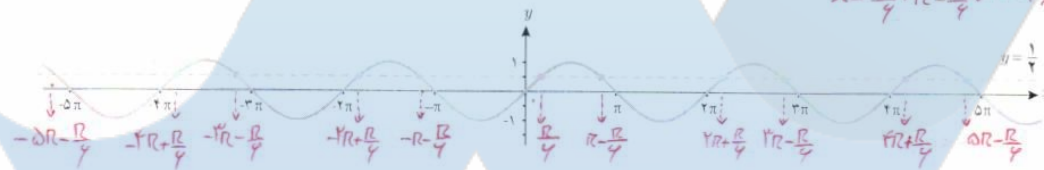
می‌باشند که به صورت کلی $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ قابل نمایش است.

اکنون معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{4}$ است مثال بزنید. ←
 $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}, \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$
 $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots$

خط $y = \frac{1}{4}$ و نمودار $y = \sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقطه‌ای از شکل زیر می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟ بله.

$$x = \frac{\pi}{4}, \pi - \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}, \dots$$



طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{4}$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

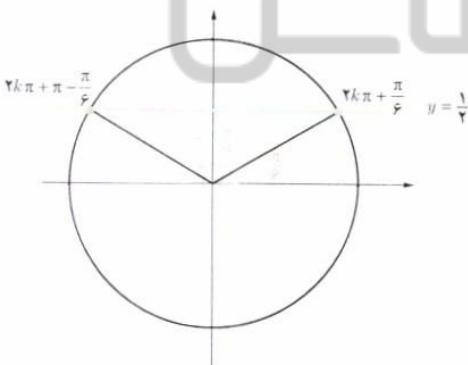
معادله‌ی $\sin x = \frac{1}{4}$ بی‌شمار جواب دارد.

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \checkmark$$

$$x = \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \checkmark$$

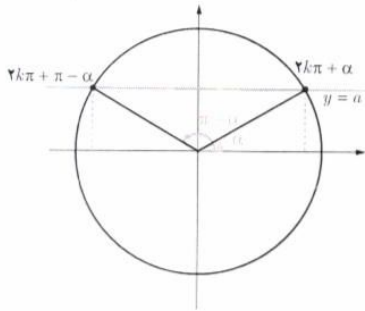
$$x = -R - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\left(-R - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(R + \frac{\pi}{4}\right) = +\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \checkmark$$

در دایره مثلثاتی زیر خط $y = \frac{1}{4}$ و زوایای $\frac{\pi}{6}$ و $\pi - \frac{\pi}{6}$ که سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{6}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi - \frac{\pi}{6}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟



هم‌انتهای $\frac{\pi}{6}$: $2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, 2k\pi + \frac{13\pi}{6}, 2k\pi + \frac{17\pi}{6}, \dots$

هم‌انتهای $\pi - \frac{\pi}{6}$: $2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi - \frac{5\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, 2k\pi + \frac{11\pi}{6}, \dots$



برای عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ که $\sin x = a$ زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin \alpha = a$. بنابراین معادله $\sin x = a$ به صورت $\sin x = \sin \alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x = \sin \alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.

با توجه به دایره مثلثاتی روبرو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به طوری که $\sin x = \sin \alpha$ در دوران‌های مختلف به صورت زیر است:

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \text{ و } x = (2k+1)\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: معادله $\sin x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

نویسنده:
گروه ریاضی منطقه خوارزمی، استان خوزستان

$$\text{ب) } 4 \sin x + \sqrt{3} = 0$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{5\sqrt{3}}{4}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } 2 \sin x - \sqrt{3} = 0$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

نمودار تابع $y = \cos x$ و خط $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله

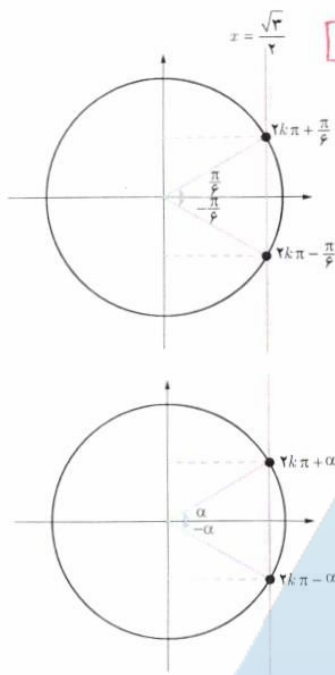
$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ را بیابید.}$$



$$\begin{cases} k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

با توجه به دایره مثلثاتی، زاویه‌ها هم آنها با $\frac{\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{4}$...
 با توجه به دایره مثلثاتی، زاویه‌ها هم آنها با $\frac{\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{4}$...

فصل ۲ مثلثات



الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.
 $x = \frac{\pi}{6}, x = 2\pi - \frac{\pi}{6}, x = 2\pi + \frac{\pi}{6}, x = -\frac{\pi}{6}, x = -2\pi + \frac{\pi}{6}, \dots$

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی رویه‌رو و محل تقاطع خط $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ با دایره مثلثاتی، جواب‌های معادله فوق را به دست آورید.

برای هر عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ در معادله $\cos x = a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos \alpha = a$.

بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به صورت $\cos x = \cos \alpha$ نوشته و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثاتی رویه‌رو به صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \text{ و } x = 2k\pi - \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: جواب‌های معادله $\cos x = \frac{1}{2}$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-2\pi, \pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ پس معادله به صورت $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های $x = -2\pi - \frac{\pi}{3}, -2\pi + \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

مثال: معادله $\sin 2x = \sin 3x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند:

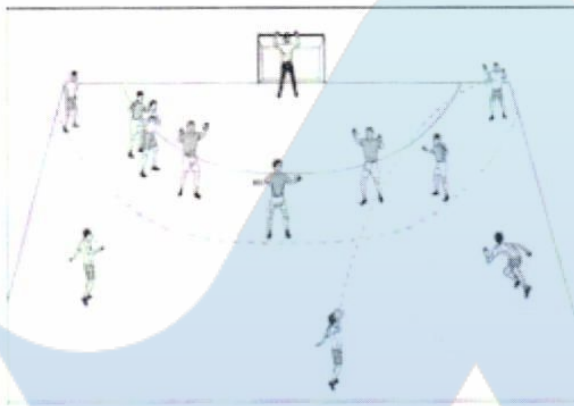
$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = -2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - 3x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال: معادله $2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

$$2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$$

$$2\sin 3x = \sqrt{2}$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} & , k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{12} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



مثال: یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت 16 m/s برای هم‌تیمی خود که در $12/8$ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ جقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$$

از رابطه داده شده به دست می‌آید:

$$12/8 = \frac{(16)^2 \sin 2\theta}{10} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{12/8 \times 10}{256} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} & , k \in \mathbb{Z} \\ 2\theta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta = \frac{\pi}{12}$ می‌باشد.

مثال: جواب‌های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را به دست آورید.

$$2\sin x \cos x = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} & , k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{6} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\cos 45^\circ = 1 - 2\sin^2(22.5^\circ) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sin^2(22.5^\circ) \Rightarrow \sin^2(22.5^\circ) = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \xrightarrow{\alpha=22.5^\circ} \sin(22.5^\circ) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin 45^\circ = 2 \times \sin(22.5^\circ) \times \cos(22.5^\circ) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \times \cos(22.5^\circ) \Rightarrow \cos(22.5^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

مثال: معادله $\cos x(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به صورت $2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$ می نویسیم. با تغییر متغیر $\cos x = t$ می توان معادله فوق را به معادله درجه دوم $2t^2 - 9t - 5 = 0$ تبدیل کرد. جواب های این معادله $t = 5$ و $t = -\frac{1}{2}$ است. بنابراین جواب های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده $\cos x = 5$ و $\cos x = -\frac{1}{2}$ به دست می آیند. از آنجا که $\cos x = 5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب های معادله $\cos x = -\frac{1}{2}$ را به دست می آوریم.

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

فرض کنید α و زاویه ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$
 $\cos \alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos 2\alpha = 2 \times \frac{25}{169} - 1 = \frac{50}{169} - 1 = -\frac{119}{169}$

ب) $\sin^2 \alpha$
 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$
 $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{169}$

نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه 22.5° به دست آورید.
 $45^\circ = 2\alpha \Rightarrow 22.5^\circ = \alpha \Rightarrow 2(22.5^\circ) = 45^\circ$

الف) $\sin \frac{\pi}{4} = \sin 3x$

ب) $\cos x = \cos 2x$

ت) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

ب) $\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

ت) $\cos^2 x - \sin x + 1 = 1$

ج) $\sin x - \cos^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos^2 x = \sin^2(\frac{R}{P} - x)$

$x = 2kR + \frac{R}{4} - 2x \Rightarrow x = \frac{2kR}{3} + \frac{R}{4}$

$x = 2kR + R - (\frac{R}{4} - 2x) \Rightarrow x = -2kR - \frac{R}{4}$

مثلی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این

خاصیت ها می توان ساخت؟
 $S = \frac{1}{2} a \times b \times \sin \theta \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ \text{ یا } \theta = 150^\circ$

الف) $\begin{cases} 3x = 2kR + \frac{R}{4} \\ 3x = 2kR + (R - \frac{R}{4}) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2kR}{3} + \frac{R}{4}, k \in \mathbb{Z}$

ب) $\cos^2 x - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = 2kR \pm \frac{R}{2}$
 $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2kR \pm \frac{R}{3}$

ب) $2x = 2kR \pm x \Rightarrow x = 2kR, k \in \mathbb{Z}$
 $3x = 2kR \Rightarrow x = \frac{2kR}{3}, k \in \mathbb{Z}$

ت) $\cos^2 x - \sin x + 1 = 1 \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 4 = 5 \Rightarrow t = \sin x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{-2}$

$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2kR - \frac{R}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 $\sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2kR + \frac{R}{4} \\ x = 2kR + \frac{5R}{4} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

ت) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \Delta = 1 \Rightarrow t = \sin x = \frac{1 \pm 1}{2}$

$\sin x = \frac{3}{4}$ غیر ممکن، $\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2kR - \frac{R}{2}, x = 2kR + \frac{3R}{2}, k \in \mathbb{Z}$

نقشه کننده: